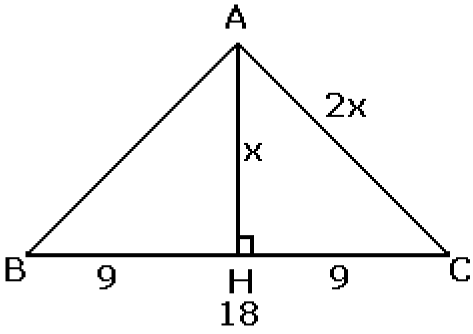


Задача 1. *Решите уравнение* $\sqrt{16+x^2}=5$. Рассмотрим прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза *c* равна 5, катет *a* равен 4, а другой катет - неизвестен. Тогда алгебраическая задача «Решите уравнение $\sqrt{16+\mathrm{x}^2}=5$» получает геометрическую интерпретацию: «Найдите катет *x* прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 5, а другой катет равен 4».

Задача 2. *Решите уравнение.* $\sqrt{x^2-9}=4$

Эта задача получает почти такую же геометрическую интерпретацию, как и первая. Заметим, что при геометрической интерпретации в качестве числовых величин рассматриваются длины отрезков, т.е. модули чисел. Поэтому необходимо на последнем этапе решения задачи провести анализ полученного ответа. В результате в первой задаче получаем $|x|=3$, а значит, $x=\pm3$. Аналогично, во второй задаче $x=\pm5$.

Задача 3. *Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника, если основание равно 18 см, а угол, противолежащий основанию, равен 120º.*

Для начала проведем высоту этого треугольника к основанию. Видно, что треугольник разделился на два равных прямоугольных треугольника с гипотенузами, равными боковой стороне равнобедренного. Т.к. угол против основания равен 120º, то углы при основании равны по 30º. Следовательно высота равна половине боковой стороны. Отметим высоту за *x*, а боковую сторону за *2x*. Т.к. высота равнобедренного треугольника, проведенная к основании. является также медианой и биссектрисой, то второй катет прямоугольного треугольника равен 9 см.

Составим уравнение:

$x^2 + 81 = 4x^2$

$3x^2 = 81$

$x^2 = 27$

$x = 3\sqrt{3}$ см

$2x = 6\sqrt{3}$ см.

Значит, боковая сторона равнобедренного треугольника равна $6\sqrt{3}$ см.

Задача решена.

Задача 4. *Одна из диагоналей параллелограмма является высотой. Найдите эту диагональ, если периметр параллелограмма равен 50 см, а разность смежных сторон равна 1 см.*

Для того, чтобы решить эту задачу, отметим меньшую сторону параллелограмма за $a = x$, а большую - за $b = x + 1$. Так как периметр равен сумме всех сторон, то получаем:

$P = 2(2x + 1) = 50$

$4x + 2 = 50$

$4x = 48$

$x = 12$, а $x + 1 = 13$.

Значит, сторона a равна 13 см, а сторона b равна 12 см.Теперь, т.к. диагональ является также и высотой, рассмотрим прямоугольный треугольник ACD. Требуется найти катет по гипотенузе и другому катету:

$13^2 = 12^2 + h^2$

$h^2 = 13^2 - 12^2$

$h = 5$ см.

Задача решена.

Задача 5. *В прямоугольном треугольнике сумма катетов равна 17 см, а длина гипотенузы 13 см. Найти катеты a, b и площадь S треугольника.*

Отметим один из катетов за *x*, а другой - за *17 - x*. По теореме Пифагора получаем:

$x^2 + x^2 - 34x + 289 = 169$

$2x^2 - 34x + 120 = 0$

$x^2 - 17x + 60 = 0$

$x = 12$ *или* $x = 5$.

Значит, один из катетов равен 12, а другой - 5. Площадь треугольника равна:

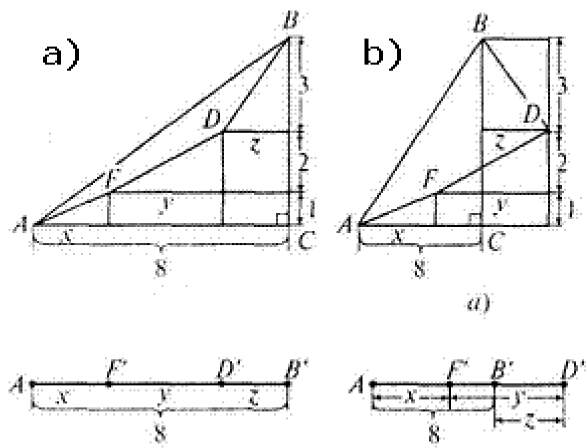
$S = ab/2 = 30$.

Задача решена.

Теперь перейдем к решению более сложных задач.

Задача 6. *Найдите наименьшее значение выражения* $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 4} + \sqrt{(z^2 + 9)}$*,если* $x + y + z = 8$.

Это выражение можно интерпретировать как сумму гипотенуз прямоугольных треугольников, один из катетов которых равен 1, 2 и 3, а второй катет равен x, y и z соответственно. Известно, что сумма длин катетов x, y и z равна 8.



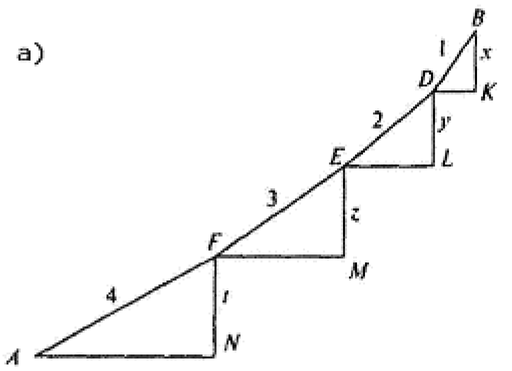
Как было сказано выше, при геометрической интерпретации данные в условии задачи числа рассматриваются как длины отрезков, а длина всегда положительна. Однако числа x, y и z, составляющие сумму x + y + z = 8, могут быть как положительными, так и отрицательными. Рассмотрим возможные варианты.

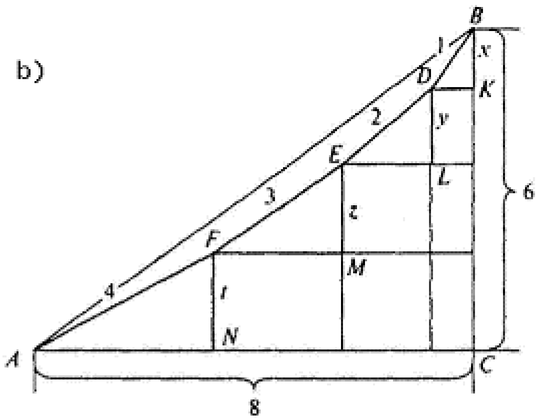
1. Все три числа x, y и z — одного знака: либо положительны, либо отрицательны. При геометрической интерпретации сумма x + y + z = 8 является длиной отрезка, равного сумме трех отрезков длины |x|, |y| и |z|.

2. Два числа, для определенности пусть это будут x и y, - одного знака, а третье число z -другого знака. При геометрической интерпретации сумма x + y + z = 8 является длиной отрезка, равного сумме двух отрезков длины |x| и |y| минус отрезок длины |z|. Решения для двух случаев одинаковы и отличаются только чертежом: в первом случае это рисунок a, а во втором случае это

рисунок b. Расположим эти треугольники на чертеже в виде «цепочки» так, чтобы их катеты были соответственно параллельны (рис. a и b). Тогда

AF = $\sqrt{x^2 + 1}$; FD = $\sqrt{y^2 + 4}$; DB = $\sqrt{z^2 + 9}$.





Соединим точки A и B. Так как длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего ее концы, значит,

AF + FD + DB ≥ AB.

Равенство достигается при условии, что точки F и D принадлежат AB. Проведя дополнительные построения, получим треугольник ABC с прямым углом C, в котором катет AC = 8, катет BC = 6, тогда гипотенуза AB = 10. Отсюда следует, что наименьшее значение данного выражения равно 10.

Задача 7. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} x + y + z + t = 6 \\ \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{4 - y^2} + \sqrt{9 - z^2} + \sqrt{16 - t^2} = 8 \end{cases}$$ *при условии, что x, y, z и t - положительны.*

Рассмотрим прямоугольные треугольники с гипотенузами 1, 2, 3 и 4 и катетами x, y, z и t соответственно. Расположим эти треугольники на чертеже в виде «цепочки» так, чтобы их катеты были соответственно параллельны. Проведя дополнительные построения, получим треугольник ABC с прямым углом C, у которого катет AC = 8, поскольку сумма длин соответствующих катетов $\sqrt{1 - x^2}$, $\sqrt{4 - y^2}$, $\sqrt{9 - z^2}$, $\sqrt{16 - t^2}$ равна 8. Катет BC = 6, так как x + y + z + t = 6. тогда гипотенуза AB = 10. Отсюда следует, что гипотенузы рассматриваемых треугольников лежат на одной прямой, потому что в противном случае длина ломаной AFEDB была бы строго больше 10.

Точки F, E и D делят гипотенузу AB на части, которые относятся следующим образом

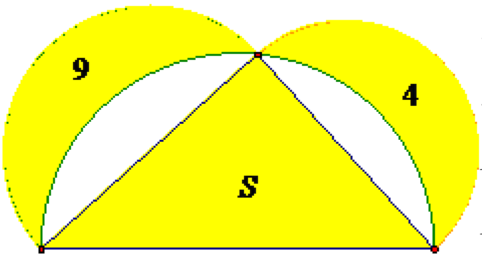
BD : DE : EF : FA = 1 : 2 : 3 : 4.

Проведем через эти точки прямые, параллельные катету AC. По теореме о пропорциональных отрезках катет BC разделился в том же отношении, т.е.

x : y : z : t = 1 : 2 : 3 : 4.

Следовательно, x = 0,6, y = 1,2, z = 1,8, t = 2,4.

Задача решена.



Задача 8. *На сторонах прямоугольного треугольника построены полуокружности. Площади образовавшихся лунок равны 9 и 4. Найдите площадь прямоугольного треугольника.*

Отметим катеты как *a и b*. По теореме Пифагора гипотенуза равна $\sqrt{a^2 + b^2}$. Площадь полуокружности равна *Пr²/2*. Значит, сумма площадей этих лунок равна:

S = $Пa^2/8 + Пb^2/8 + ab/2 - (Пa^2 + Пb^2)/8 = 13$

4ab/8 = 13

S = ab/2 = 13.

Задача решена.

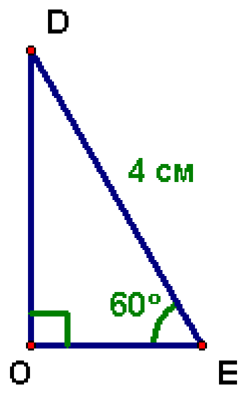
Задача 9. Предлагаю вашему вниманию задачу для самостоятельного решения:

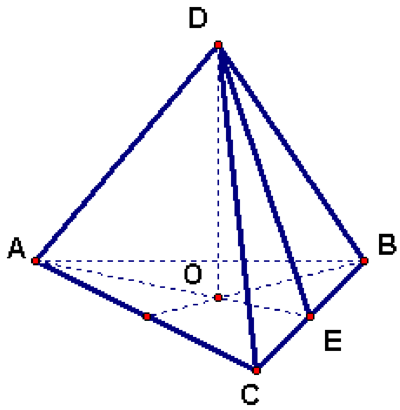
Найдите наименьшее значение выражения:

$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{9-y^2} + \sqrt{25-z^2} + \sqrt{49-t^2}$,

если x + y + z + t = 6 и все эти переменные положительны.

Задача 10. С помощью теоремы Пифагора можно решать задачи и в стереометрии. Вот одна из таких задач:





Апофема правильной треугольной пирамиды равна 4 см, а двугранный угол при основании равен 60°. Найдите объём пирамиды.

Объем пирамиды вычисляется по формуле: V = Sh/3, где S - площадь основания пирамиды, а h - высота пирамиды. Значит, для решения задачи необходимо найти эти величины. Надо учитывать, что AO и BO - медианы.

Чтобы найти h рассмотрим треугольник DOE:

Треугольник DOE - прямоугольный с прямым углом DOE. По условию гипотенуза DE=4 см (апофема пирамиды), а угол DEO=60° (двугранный угол при основании). Заметим, что угол EDO=30°, а катет, лежащий напротив угла в 30° равен половине гипотенузы. Следовательно OE=2 см. Катет OD, то есть высоту пирамиды, можем найти по теореме Пифагора:

$$OD = \sqrt{DE^2 - OE^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

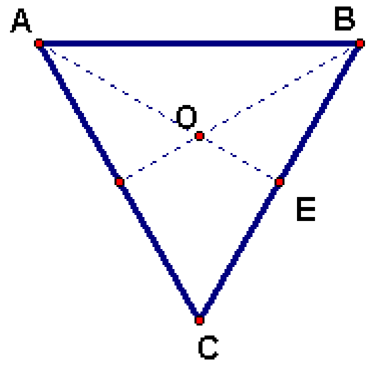
Итак, высота Пирамиды равна $2\sqrt{3}$ см.

(Конечно, можно было вычислять катет OD как произведение гипотенузы DE на синус противолежащего угла DEO).

Как можем вычислить S ? Основанием пирамиды является правильный треугольник. Площадь треугольника равны половине произведения основания на высоту: S = ah/2. А можно пробовать воспользоваться и формулой для вычисления равностороннего треугольника: $S = a^2\sqrt{3}/4$. (Что удобнее - станет ясно в процессе анализа).

Рассмотрим треугольник ABC.

Во-первых, он равносторонний по условию задачи. Во-вторых, из треугольника DOE мы нашли OE=2 см. Как по этим данным вычислить сторону треугольника?



Можно, например, рассмотреть треугольник OEB. Он является прямоугольным (AE - медиана равностороннего треугольника, а следовательно и высота). Угол OBE равен 30°, поскольку BO биссектриса угла равностороннего треугольника. Вновь замечаем, что катет, лежащий напротив угла в 30° равен половине гипотенузы. Следовательно, гипотенуза BO=2OE=4 см. По теореме Пифагора находим BE=$2\sqrt{3}$ см.

Поскольку BE - половина стороны треугольника, то сторона a=$4\sqrt{3}$ см. Подставляя это значение в формулу для вычисления равностороннего треугольника, получаем:

$$\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{a}^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(4\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{48\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}\ \boldsymbol{см}^2$$

Теперь можем вычислить объем пирамиды:

$$\boldsymbol{V} = \frac{1}{3}\boldsymbol{SH} = \frac{1}{3}\cdot 12\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3} = 24\ \boldsymbol{см}^3$$

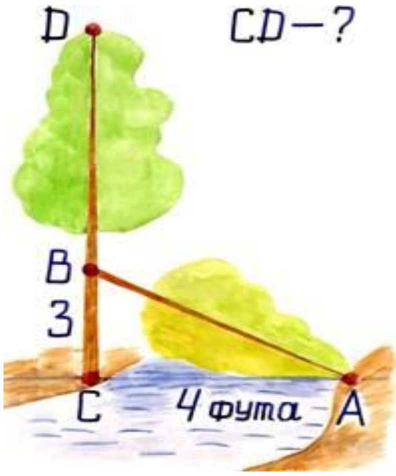
Задача решена!

Исторические задачи

Предлагаю несколько задач, найденных в исторических книгах. Они настолько легкие, что я не буду объяснять их решение.

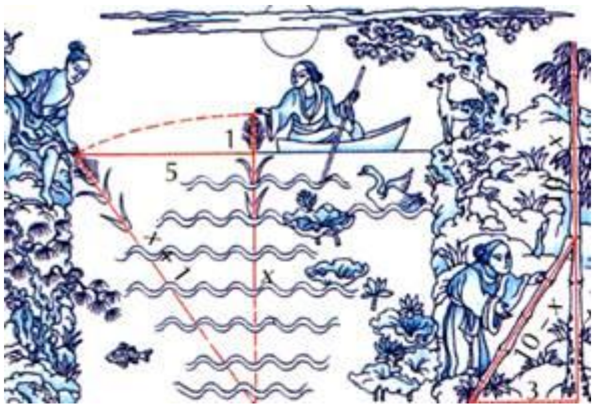
Задача Бхаскари

«На берегу реки рос тополь одинокий. Вдруг ветра порыв его ствол надломал. Бедный тополь упал. И угол прямой стеченьем реки его ствол составлял. Запомни теперь, что в этом месте река В четыре лишь фута была широка Верхушка склонилась у края реки. Осталось три фута всего от ствола, Прошу тебя, скоро теперь мне скажи: У тополя как велика высота?»



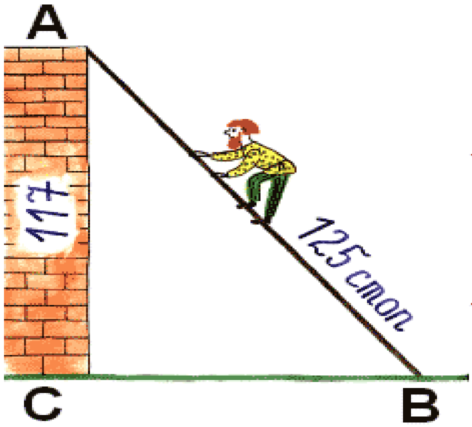
Задача из китайской «Математики в девяти книгах»

«Имеется водоем со стороной в 1 чжан = 10 чи. В центре его растет камыш, который выступает над водой на 1 чи. Если потянуть камыш к берегу, то он как раз коснётся его. Спрашивается: какова глубина воды и какова длина камыша?».



Задача из учебника «Арифметика» Леонтия Магницкого

«Случися некому человеку к стене лестницу прибрати, стены же тоя высота есть 117 стоп. И обреете лестницу долготью 125 стоп. И ведати хочет, колико стоп сея лестницы нижний конец от стены отстояти имать».



Задача о бамбуке из древнекитайского трактата "Гоу-гу"

«Имеется бамбук высотой в 1 чжан. Вершину его согнули так, что она касается земли на расстоянии 3 чи от корня (1 чжан = 10 чи).Какова высота бамбука после сгибания?»